VAK en GRAAD	Wiskunde Graad 10	
KWARTAAL 1	Week 5: Eksponente, vergelykings en Ongelykhede	
ONDERWERP	Lineêre vergelykings, Ongelykhede en Kwadratiese vergelykings	
DOEL VAN LES	Oplos van Vergelykings en Ongelykhede	
HULPBRONNE	***Papier gebaseerde bronne***	***Digitale bronne***
	Blaai asseblief in jou Handboek na Lineêre vergelykings en Ongelykhede en ook na Kwadratiese vergelykings	https://www.youtube.com/watch?v=TkL0Iqs9mpY https://www.youtube.com/watch?v=GmMX3-nTWbE https://www.youtube.com/watch?v=WOn7c7PdnTk https://www.youtube.com/watch?v=wwDfD4iGBDE https://www.youtube.com/watch?v=fOnLQ_5mQic https://www.youtube.com/watch?v=AuYCyMCmovU
INLEIDING	In hierdie week se les gaan ons fokus op die Oplos van Lineêre Vergelykings en Ongelykhede en daarna ook kyk na die Oplossing van Kwadratiese vergelykings	
KONSEPTE/ VAARDIGHEDE	1. Getallestelsels 2. KGV van Noemers 3. Vereenvoudiging/ Faktorisering van uitdrukkings 4. Oplos van vergelykings	
Les 1	Hersiening van Gr 9: Oplos van Lineêre vergelykings	

Uitdrukking: $2x^3 - \frac{4x}{\sqrt{x}} + 3$

Uitdrukkings kan slegs **vereenvoudig word**

Vergelyking: $2x^3 - \frac{4x}{\sqrt{x}} + 3 = 2x - 3$

Vergelyking: wanneer ons twee uitdrukkings gelykstel; LK = RK; Vergelykings **kan opgelos** word

Lineêre vergelykings: grootste eksponent van die onbekende (gewoonlik x) is 1
Kwadratiese vergelykings: grootste eksponent is 2
Kubiese vergelykings: grootste eksponent is 3

Isoleer terme met x op LK deur -3 beide kante by te tel

Voorbeeld 1: $2x + 3 = 7$

$\therefore 2x + 3 - \mathbf{3} = 7 - \mathbf{3}$

$\therefore 2x = 4$

Los op vir x deur beide kante te deel deur 2

$\therefore \frac{2x}{2} = \frac{4}{2}$

$\therefore x = 2$

Voorbeeld 2:

$2x + 3 = 2 - 3(x + 3)$

$\therefore 2x + 3 = 2 - \mathbf{3x} - \mathbf{9}$

$\therefore 2x + \cancel{3} - \cancel{\mathbf{3}} + \mathbf{3x} = 2 - \cancel{3x} - 9 - \mathbf{3} + \cancel{\mathbf{3x}}$

Kry die onbekendes alleen op LK: verwyder +3 op die LK en $-3x$ op die RK deur **inverse bewerkings** beide kante van = teken te doen

$\therefore 2x + 3x = 2 - 9 - 3$

$\therefore 5x = -10$

+ en – is **Inverse bewerkings** terwyl × en ÷ inverse bewerkings is van mekaar

$\therefore \frac{5x}{5} = \frac{-10}{5}$

$\therefore x = -2$

Jy kan TOETS of jou antwoorde korrek is deur die waarde van x te vervang in die RK en LK van die oorspronklike vergelyking om te sien of hulle gelyk is

Voorbeeld 3: $\frac{x+2}{3} - \frac{x-1}{2} = 4$ KGV van 2 en 3 is **6**

$\times$ **elke term** met 6:

$$\therefore \frac{\mathbf{6}(x+2)}{3} - \frac{\mathbf{6}(x-1)}{2} = (\mathbf{6})4$$

$$\therefore 2(x+2) - 3(x-1) = 24$$
$$\therefore 2x + 4 - 3x + 3 = 24$$
$$\therefore 2x - 3x = 24 - 3 - 4$$
$$\therefore -x = 17$$
$$\therefore x = -17$$

- **Faktoriseer** noemers, indien enige
- Verwyder breuke deur elke term **te vermenigvuldig** met die **KGV** van die noemers
- Verwyder hakies (**distributiewe wet**)
- Isoleer die onbekende op LK deur die **inverse bewerking** beide kante van = teken te doen
- Tel gelyksoortige terme bymekaar
- Los op vir x deur met die koëffisiënt van x beide kante te deel

LET WEL:

- as ons: $4(x-2) = 4x - 8$ oplos
  $\therefore 4x - 8 = 4x - 8$ hierdie sal WAAR wees vir **enige** $\mathbb{R}$ **waarde** van x
  Antwoord: $x \epsilon\ \mathbb{R}$
  - Hierdie tipe van vergelyking ons noem 'n **IDENTITEIT**
- As ons: $4(x-2) = 4x$ oplos
  $\therefore 4x - 8 = 4x$
  $\therefore -8 = 0$ wat nooit waar kan wees nie
  Antwoord: **Geen** $\mathbb{R}$ **oplossing** vir x
- As ons 1 term het op LK en 1 term op RK ons kan ook kruisvermenigvuldig soos hieronder:

$$\frac{5x}{3} = \frac{x+1}{2}$$

$$\therefore 2(5x) = 3(x+1)$$
$$\therefore 10x = 3x + 3$$
$$\therefore 7x = 3$$
$$\therefore x = \frac{3}{7}$$

KAN JY?

Los die volgende vergelykings op:

1. $2x - 5 = 3$
2. $4x + 6 = x - 3$
3. $5a - 3(a+1) = 2 - 3a$
4. $2(x+2) = 6(x+1) - (x-4)$
5. $(2b-5)(3b+2) = 2(3b^2 - 4b + 1)$
6. $2(x+1) - (3-2x) = 2x - (7-2x)$
7. $\frac{x-2}{3} = \frac{x-3}{4}$
8. $\frac{5x+8}{6} - \frac{x}{4} = \frac{2x-9}{3}$
9. $\frac{3(y-1)}{2} = y - 2 + \frac{y+1}{2}$
10. $\frac{3}{2}(x+3) - \frac{2x}{3} = 2 - \frac{4x-3}{6}$

Antwoorde:

1. $x = 4$
2. $x = -3$
3. $a = 1$
4. $x = -2$
5. $b = -4$
6. Geen $\mathbb{R}$ oplossing
7. $x = -1$
8. $x = 52$
9. $y \epsilon\ \mathbb{R}$
10. $x = -\frac{4}{3}$

Les 2	Lineêre vergelykings: Rasionale uitdrukkings (breuke met onbekende in noemer)

LET WEL: Wanneer ons werk met Rasionale vergelykings: mag **noemers $\neq$ 0** omdat deling deur 0 ongedefinieerd is. Daarom het ons **beperkings** op die waarde van die onbekende (x)

x kan nie hierdie waardes hê nie, anders deel ons deur 0

Los die volgende vergelykings op:

Voorbeeld 1: $\frac{5}{x+2} + \frac{3}{2-x} = \frac{2}{x}$ KGV: $x(x+2)(2-x)$; $x \neq 0;\ -2;\ +2$

$\times$ elke term met KGV:

Jy hoef nie hierdie stap te toon nie, maar vir oefening, wys ons dit hier

$$\therefore \frac{5}{\cancel{x+2}} \times x(\cancel{x+2})(2-x) + \frac{3}{\cancel{2-x}} \times x(x+2)(\cancel{2-x}) = \frac{2}{\cancel{x}} \times \cancel{x}(x+2)(2-x)$$

$$\therefore 5x(2-x) + 3x(x+2) = 2(x+2)(2-x)$$
$$\therefore 10x - 5x^2 + 3x^2 + 6x = 2(4-x^2)$$
$$\therefore 10x - 5x^2 + 3x^2 + 6x = 8 - 2x^2$$
$$\therefore 16x = 8$$
$$\therefore x = \frac{1}{2}$$

Let Wel: $(x+2) \ = \ (2+x)$ wat to verskil van twee vierkante lei

Voorbeeld 2: $\frac{2x-5}{x^2-2x-8} = \frac{1}{2x-8}$ pas metode toe

$\therefore \frac{2x-5}{(x+2)(x-4)} = \frac{1}{2(x-4)}$ KGV: $2(x+2)(x-4)$; $x \neq -2;\ \mathbf{4}$

$\times$ elke term met KGV:

$$\therefore 2(2x-5) = x+2$$
$$\therefore 4x - 10 = x + 2$$
$$\therefore 3x = 12$$

$\therefore x = \mathbf{4}$, maar hierdie is 'n beperking!!!

$\therefore$ Antwoord: Waar vir geen waardes van x

Vir elke "NUWE" term: KGV $\div$ Noemer $\times$ teller

'n Metode om lineêre vergelykings op te los:

- **Faktoriseer** noemers, indien enige
- Verwyder breuke deur elke term **te vermenigvuldig** met die **KGV** van die noemers
- Verwyder hakies (**distributiewe wet**)
- Isoleer die onbekende op LK deur die **inverse bewerking** beide kante van = teken te doen
- Tel gelyksoortige terme bymekaar
- Los op vir x deur met die koëffisiënt van x beide kante te deel

KAN JY?

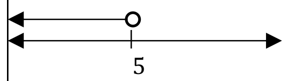
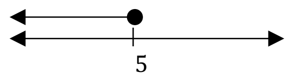
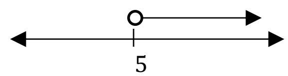
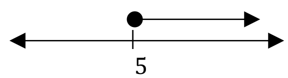
Los die volgende vergelykings op:

1. $\frac{x}{2} - \frac{x}{3} = 2$
2. $\frac{x+2}{4} - \frac{x-6}{3} = \frac{1}{2}$
3. $\frac{2}{x} = \frac{3}{x-2}$
4. $1 + \frac{3}{2x-1} = \frac{4}{3}$
5. $\frac{1}{m-1} = \frac{3}{m} - \frac{2}{m+2}$
6. $\frac{1}{x^2-x} + \frac{2}{x-1} = \frac{1}{x}$
7. $\frac{1}{x+2} + \frac{3}{x^2-4} = \frac{2}{2-x}$
8. $\frac{1}{2x^2-x-3} + \frac{2}{x^2-1} = \frac{3}{2x^2-5x+3}$

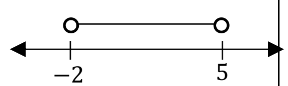
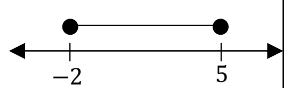
Antwoorde:

1. $x = 12$
2. $x = 24$
3. $x = -4$
4. $x = 5$
5. $m = 2$
6. $x = -2$
7. $x = -1\frac{2}{3}$
8. $x = 5$

Les 3 + 4	Lineêre ongelykhede

Simbool	Betekenis	Voorbeeld	Getallelyn
$<$	Kleiner as	$x < 5$ Lees: "x is kleiner as 5 (alle x waardes kleiner as 5)"	
$\leq$	Kleiner of gelyk aan	$x \leq 5$ "x is kleiner of gelyk aan 5"	
$>$	Groter as	$x > 5$ "x is groter as 5"	
$\geq$	Groter of gelyk aan	$x \geq 5$ "x is groter of gelyk aan 5"	

Voorstelling van intervalle:

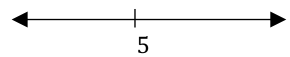
Interval Notasie	Versamelings-keurder notasie	Getallelyn
$x \in (-2; 5)$ Lees: Alle x waardes (Reële getalle) **tussen** -2 en 5 *Oop interval*	$\{x: -2 < x < 5, x \in \mathbb{R}\}$ Lees: Alle x waardes, SODANIG DAT x groter is as -2, maar (en) kleiner is as 5 en x is 'n Reële getal	
$x \in [-2; 5]$ Alle x waardes (Reële getalle) vanaf -2 tot 5 (ingesluit) *Geslote interval*	$\{x: -2 \leq x \leq 5, x \in \mathbb{R}\}$ Alle x waardes, SODANIG DAT x groter of gelyk is aan -2, maar kleiner of gelyk is aan 5 en x is 'n Reële getal	

○ - toon dat die getal (5) is NIE INGESLUIT in die interval nie

← toon alle $\mathbb{R}$ waardes links van 5

● - toon dat die getal (5) is INGESLUIT in die interval

→ toon alle $\mathbb{R}$ waardes regs van 5



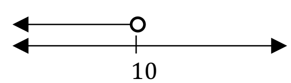
Getallelyn

KAN JY?

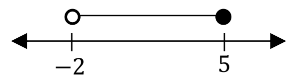
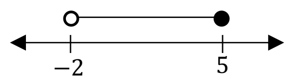
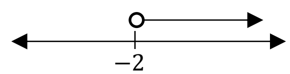
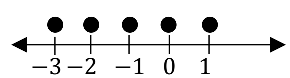
A. Toon die volgende op 'n getallelyn:

1. $x \in (7; 12)$
2. $\{x: 0 < x \leq 8, x \in \mathbb{R}\}$
3. $\{x: 5 \leq x < 10, x \in \mathbb{R}\}$
4. $x \in (-\infty; 3]$
5. $\{x: -1 \leq x < 3, x \in \mathbb{Z}\}$

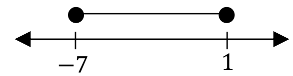
B. Skryf in versamelings-keurder notasie:

1. $x \in [0; 5)$
2. 

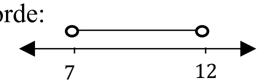
3. $x \in \{0; 1; 2; 3; 4\}$

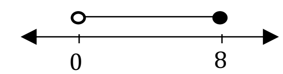
$x \epsilon [-2; 5)$ Alle Reële getalle vanaf (en ingeslote) -2 tot by, maar uitsluitende 5 *Geslote-oop of half oop interval*	$\{x: -2 \leq x < 5, x \epsilon \mathbb{R}\}$ Alle x waardes, SODANIG DAT x is groter of gelyk aan -2, maar (en) kleiner is as 5 en x is 'n Reële getal	
$x \epsilon (-2; 5]$ Alle Reële getalle vanaf maar uitsluitende -2 tot by, en insluitende 5 *Oop-geslote of half geslote interval*	$\{x: -2 < x \leq 5, x \epsilon \mathbb{R}\}$ Alle x waardes, SODANIG DAT x groter is as -2, maar kleiner of gelyk is aan 5 en x is 'n Reële getal	
$x \epsilon (-2; \infty)$ Alle Reële getalle groter as -2 Let Wel: ∞ (oneindig) – altyd oop	$\{x: x > -2, x \epsilon \mathbb{R}\}$ Alle x waardes, SODANIG DAT x groter is as -2 en x is 'n Reële getal.	
LET WEL: Interval notasie word slegs gebruik vir **aaneenlopende intervalle** (gewoonlik $x\epsilon\mathbb{R}$) Vir versameling van heelgetalle ($\mathbb{Z}$) het ons, bv.: $x\epsilon\{-3;\ -2;\ -1; 0; 1\}$	$\{x: -4 < x < 2, x \epsilon \mathbb{Z}\}$ Of $\{x: -3 \leq x \leq 1, x \epsilon \mathbb{Z}\}$	Let Wel: Slegs individuele punte 

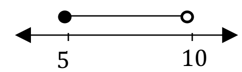
C. Skryf in Interval notasie:

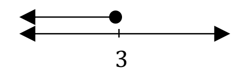
1. 
2. $\{x: x > -7, x \epsilon \mathbb{R}\}$
3. $\{x: -1 < x \leq 3, x \epsilon \mathbb{Z}\}$

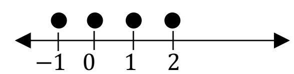
Antwoorde:

A 1. 

2. 

3. 

4. 

5. 

B

1. $\{x: 0 \leq x < 5, x \epsilon \mathbb{R}\}$
2. $\{x: x < 10, x \epsilon \mathbb{R}\}$
3. $\{x: 0 \leq x \leq 4, x \epsilon \mathbb{Z}\}$ OF $\{x: -1 < x < 5, x \epsilon \mathbb{Z}\}$

C

1. $x \epsilon [-7; 1]$
2. $x \epsilon (-7; \infty)$
3. $x \epsilon (-1; 3]$

Oplos van Lineêre vergelykings:

Let Wel: die volgende bewering is waar: $7 > 4$ (1)

As ons 6 beide kante bytel is: $13 > 10$ steeds waar;

Ook: $7 - 6 > 4 - 6 \quad \Rightarrow 1 > -2$ is waar

As ons beide kante $\times$ met 6 in (1) is: $42 > 24$ steeds waar;

Ook: $\frac{7}{4} > \frac{4}{4} \quad \Rightarrow 1\frac{3}{4} > 1$ is waar.

As ons egter beide kante $\times$ met -1 in (1): $-7 > -4$ is NIE WAAR NIE

Die ongelykheidsteken moet verander!: $\mathbf{-7 < -4}$

Daarom, as ons 'n ongelykheid $\times$ of $\div$ met 'n negatiewe $(-)$ getal, verander die ongelykheidsteken van rigting

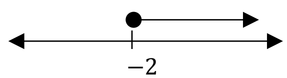
Los die volgende lineêre ongelykhede op en toon die oplossing op 'n getallelyn:

Voorbeeld 1: $2 + 3x \geq x - 2$

$\therefore 3x - x \geq -2 - 2$

$\therefore 2x \geq -4$

$\therefore x \geq -2$



Voorbeeld 2: $3(x - 1) - 2 < 6x + 4$

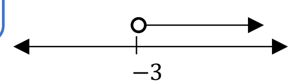
$\therefore 3x - 3 - 2 < 6x + 4$

$\therefore -3x < 9$

$\therefore \frac{-3x}{-3} > \frac{9}{-3}$

$<$ verander na $>$ wanneer ons $\div$ met (-3)

$\therefore x > -3$



Voorbeeld 3: $-7 < 2x + 3 \leq 3$

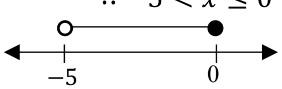
Trek 3 regdeur af

$\therefore -7 - \mathbf{3} < 2x + 3 - \mathbf{3} \leq 3 - \mathbf{3}$

$\therefore -10 < 2x \leq 0$

$\therefore -5 < x \leq 0$

Deel al die terme deur 2



Voorbeeld 4: $-3 < \frac{1-a}{3} < 4$

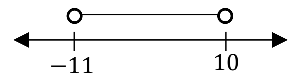
- $\times 3$
- Trek 1 af vanaf alle terme
- $\div -1$: teken verander
- Herskryf oplossing;

$\therefore -9 < 1 - a < 12$

$\therefore -10 < -a < 11$

$\therefore 10 > a > -11$

$\therefore -11 < a < 10$



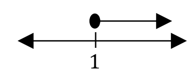
KAN JY?

Los die volgende lineêre ongelykhede op en toon die oplossing op 'n getallelyn:

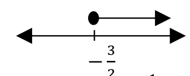
1. $9x - 7 \geq 5 - 3x$
2. $2(x - 3) \leq 4x - 3$
3. $5(a - 2) - 3a < 3 - (a - 2)$
4. $\frac{2x-5}{4} - \frac{5x-2}{3} > 0$
5. $-6 \leq 2x - 4 < 2$
6. $1 < \frac{3-x}{2} < 3$

Antwoorde:

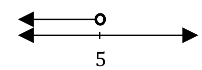
1. $x \geq 1$



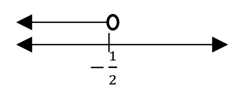
2. $x \geq -\frac{3}{2}$



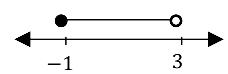
3. $a < 5$



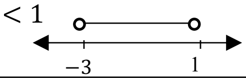
4. $x < -\frac{1}{2}$



5. $-1 \leq x < 3$



6. $-3 < x < 1$



Les 5	Kwadratiese vergelykings: $ax^2 + bx + c = 0$

STANDAARDVORM van kwadratiese vergelyking: $ax^2 + bx + c = 0$

LET WEL: as $a.b = 0$
$\Rightarrow a = 0$ of $b = 0$

- **Faktoriseer** noemers, indien enige
- **Verwyder breuke** deur elke term te vermenigvuldig met die KGV van die noemers
- Verwyder hakies (distributiewe wet)
- Skryf vergelyking in **standaardvorm**
- Faktoriseer kwadratiese uitdrukking
- Pas reël toe: as $a.b = 0$
  $\Rightarrow a = 0$ of $b = 0$
- Die oplossings van 'n kwadratiese vergelyking word die **WORTELS** van die kwadratiese vgl genoem (max van 2 wortels)

Los op vir x:

Voorbeeld 1: $(x-2)(x+3) = 0$
$\therefore x - 2 = 0$ of $x + 3 = 0$
$\therefore x = 2$ of $x = -3$

Voorbeeld 2: $x^2 - 5x - 6 = 0$
$\therefore (x-6)(x+1) = 0$
$\therefore x - 6 = 0$ of $x + 1 = 0$
$\therefore x = 6$ of $x = -1$

Voorbeeld 3: $x^2 = -5x$
$\therefore x^2 + 5x = 0$
$\therefore x(x+5) = 0$
$\therefore x = 0$ of $x + 5 = 0$
$\therefore x = 0$ of $x = -5$

NIE: $\div x$: $\therefore x = -5$
Moet NOOIT deel deur die onbekende/veranderlike nie; jy deel (heel waarskynlik) **deur nul**, wat ontoelaatbaar is en jy raak ontslae van een van die oplossings: **Skryf in standaardvorm!!**

Voorbeeld 4: $(2x-1)(x+2) = 25$
$\therefore 2x^2 + 3x - 2 - 25 = 0$
$\therefore 2x^2 + 3x - 27 = 0$
$\therefore (2x+9)(x-3) = 0$
$\therefore 2x + 9 = 0$ of $x - 3 = 0$
$\therefore x = -\frac{9}{2}$ of $x = 3$

NIE: $2x - 1 = 25$ **OF** $x + 2 = 25$
Reël geld slegs as $\boldsymbol{a.b = 0}$
Skryf in standaardvorm!

Voorbeeld 5: $4x^2 - 9 = 0$
$\therefore (2x-3)(2x+3) = 0$
$\therefore x = \frac{3}{2}$ of $x = -\frac{3}{2}$

Alternatief: $4x^2 = 9$
$\therefore x^2 = \frac{9}{4}$
$\therefore x = \pm\sqrt{\frac{9}{4}}$
$\therefore x = \frac{3}{2}$ of $x = -\frac{3}{2}$

Voorbeeld 6: $x^2 + 4 = 0$
$\therefore x^2 = -4$
$\therefore x = \pm\sqrt{-4}$

x^2 is **ALTYD** ≥ 0

Nie-Reële getal

Antwoord: geen $\mathbb{R}$ oplossing vir x

Voorbeeld 7: $\frac{x^2-2x-3}{x-3} = 2$ KGV $= (x-3)$; $x \neq 3$

$\times (x-3)$: $x^2 - 2x - 3 = 2(x-3)$
$\therefore x^2 - 2x - 3 = 2x - 6$
$\therefore x^2 - 4x + 3 = 0$
$\therefore (x+1)(x-3) = 0$
$\therefore x = -1$ of $\boxed{x = 3}$ Nie van toepassing (nie geldig)
$\therefore x = -1$

KAN JY?

Los op vir x:

1. $(x+3)(x-1) = 0$
2. $-2(x+2)(x+3) = 0$
3. $5x(2x+1) = 0$
4. $x^2 + 14x + 48 = 0$
5. $2x^2 - 18 = 0$
6. $6x^2 = 5x + 6$
7. $(x-3)(x-2) = 12$
8. $\frac{x}{x-2} + \frac{2}{2-x} = \frac{1}{x-3}$
9. $\frac{3}{x} + \frac{3}{x^2-x} = \frac{1}{x^2-1}$

Antwoorde:

1. $x = -3$ of $x = 1$
2. $x = -2$ of $x = -3$
3. $x = 0$ of $x = -\frac{1}{2}$
4. $x = -6$ of $x = -8$
5. $x = 3$ of $x = -3$
6. $x = -\frac{2}{3}$ of $x = \frac{3}{2}$
7. $x = 6$ of $x = -1$
8. $x = 4$
9. $x = -\frac{2}{3}$

<table>
<tr><td>AKTIWITEITE</td><td>Doen ander oefeninge uit jou Wiskunde Handboek</td></tr>
<tr><td>KONSOLIDASIE</td><td>

Oplos van Lineêre vergelykings:

Faktoriseer noemers, indien enige
Verwyder breuke deur elke term te vermenigvuldig met die KGV van die noemers
Verwyder hakies (distributiewe wet)
Isoleer die onbekende op LK deur die inverse bewerking beide kante van $=$ teken te doen
Tel gelyksoortige terme bymekaar
Los op vir x deur met die koëffisiënt van x beide kante te deel

Lineêre ongelykhede: as ons ‘n ongelykheid $\times$ of $\div$ met ’n negatiewe $(-)$ getal, verander die ongelykheidsteken van rigting
STANDAARDVORM van kwadratiese vergelyking: $\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$
Oplos van kwadratiese vergelykings:

Faktoriseer noemers, indien enige
Verwyder breuke deur elke term te vermenigvuldig met die KGV van die noemers
Verwyder hakies (distributiewe wet)
Skryf vergelyking in standaardvorm
Faktoriseer kwadratiese uitdrukking
Pas reël toe: as $a.b = 0$
$\Rightarrow a = 0$ of $b = 0$
Die oplossings van ’n kwadratiese vergelyking word die WORTELS van die kwadratiese vgl genoem (max van 2 wortels)

</td></tr>
<tr><td>WAARDES</td><td>Liewe leerder. Wiskunde gaan nie (net) oor getalle, vergelykings, berekeninge of algoritmes nie: dit gaan oor BEGRIP - William Paul Thurston. BEGRIP kom deur OEFENING. Hou aan om Wiskunde elke dag te oefen!</td></tr>
</table>