VAK en GRAAD	Wiskunde Graad 10
KWARTAAL 1	Week 4: Eksponente, Vergelykings en Ongelykhede
ONDERWERP	Die Reële Getallestelsel en Eksponente
DOEL VAN LES	Om Reële getalle te hersien en Eksponente in te lei
HULPBRONNE	***Papier gebaseerde bronne*** *Gaan asseblief na die gedeelte oor Getallestelsels en daarna na Eksponente in jou Handboek*
INLEIDING	In hierdie les gaan ons die klassifikasie van Reële getalle van Gr 9 hersien en dan werk met Eksponente
KONSEPTE/ VAARDIGHEDE	1. Reële getalle: Rasionale en irrasionale getalle 2. Eksponentwette en reëls 3. Vereenvoudig eksponensiële uitdrukkings 4. Oplos van Eksponensiële vergelykings
Les 1 + 2	**Die Reële getallestelsel**

Die versameling van Reële Getalle, $\mathbb{R}$

Die Reële getalle is oneindig en bevat beide Rasionale en Irrasionale Getalle.
Elke Reële getal kan voorgestel word as 'n punt op die getallelyn.

Let Wel: $10 = \frac{10}{1}$ wat $\mathbb{Q}$ is
$0{,}745 = \frac{745}{1000}$ wat $\mathbb{Q}$ is
$0{,}\dot{1} = \frac{1}{9}$ wat $\mathbb{Q}$ is
$0 = \frac{0}{1}$ wat $\mathbb{Q}$ is
$\frac{a}{0}$ is **Ongedefinieerd.**
Ons mag **NOOIT deel deur** 0 nie.

Die versameling van Rasionale Getalle, $\mathbb{Q}$

Dit is 'n oneindig versameling van getalle wat kan geskryf word in die vorm $\frac{a}{b}$, waar beide a en b heelgetalle ($\mathbb{Z}$) is en $b \neq 0$

- bv.: $-2\frac{2}{3}; \frac{45}{32}; 0{,}132; -12; 1; \sqrt{16}; \sqrt[3]{64}; 2{,}1\dot{2}\dot{3}$; ens.

$\mathbb{Q}$ is geslote onder optelling, vermenigvuldiging en aftrekking (as jy $\mathbb{Q}$ getalle $\times, +,$ of $-$, sal jou antwoord 'n $\mathbb{Q}$ getal wees). Dit is nie waar vir deling nie ($\frac{a}{0}$ is **Ongedefinieerd**)

- Alle Eindigende desimale (0,745) en Repeterende getalle ($0,\dot{1}$) is Rasionale getalle.
- **LET WEL**: π is **nie** $\mathbb{Q}$, alhoewel ons $\frac{22}{7}$ en 3,14 gebruik as **benaderde** $\mathbb{Q}$ **waardes**.

Die versameling van Irrasionale Getalle, $\mathbb{Q}'$

Dit is 'n oneindige versameling van getalle wat nie in die vorm $\frac{a}{b}$ geskryf kan word waar beide a en b heelgetalle is nie

- bv. $\sqrt{2}; \sqrt[3]{4}; \boldsymbol{\pi}; 0{,}123 \ldots$
- vierkantswortels van getalle wat nie volkome kwadrate is nie
- 3de magswortels van getalle wat nie volkome 3de magte, ens. is nie.
- π

Kyk vir 'n **volkome kwadraat** wat net kleiner is as 21 en die een wat net groter is as 21, wat 16 en 25 is

Voorbeeld 1: Skryf $0,\dot{2}$ as 'n breuk.

$0,\dot{2} = 0{,}22222222 \ldots$
Laat $x = 0{,}2222222 \ldots$ (1)
$\times 10$: $\therefore 10x = 2{,}22222222 \ldots$ (2)
(2) − (1): $10x - x = 2{,}2222222 \ldots - 0{,}22222222 \ldots$
$\therefore 9x = 2$
$\therefore x = \frac{2}{9}$

Voorbeeld 2: Toon aan dat $1,\dot{1}\dot{2}$ 'n $\mathbb{Q}$ getal is

$1,\dot{1}\dot{2} = 1{,}1212121212 \ldots$
Laat $x = 1{,}1212121212 \ldots$ (1)
$\times 100$: $\therefore 100x = 112{,}12121212 \ldots$ (2)
(2) − (1): $100x - x = 112{,}12121212 \ldots - 1{,}12121212 \ldots$
$\therefore 99x = 111$
$\therefore x = \frac{111}{99}$ wat $\mathbb{Q}$ is

Voorbeeld 3: Tussen watter 2 heelgetalle ($\mathbb{Z}$) lê $\sqrt{21}$?
$16 < 21 < 25$
$\therefore \sqrt{16} < \sqrt{21} < \sqrt{25}$
$\therefore 4 < \sqrt{21} < 5 \Rightarrow \sqrt{21}$ lê tussen 4 en 5

Die versameling van Heelgetalle, $\mathbb{Z}$

Hierdie oneindige versameling bevat ‘n negatief getal, $-n$, vir elke Natuurlike Getal, n.

- $\mathbb{Z}$ = {....; -5; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5; ….}
- Die versameling is geslote onder $+, -$ en $\times$

Die versameling van Telgetalle, $\mathbb{N}_0$

Dit is ‘n oneindige versameling van getalle.

- $\mathbb{N}_0$= {0;1; 2; 3; 4; 5; ….}
- Geslote onder $+$ en $\times$. As $n \in \mathbb{N}_0$ dan is $n \times 0 = 0$ en $n + 0 = n$

Om tot n desimale plekke af te rond, kyk na die syfer regs van hierdie syfer.

- As dit < 5 is, dan bly die syfer in die $n-$de plek dieselfde en die syfers na regs val weg.
- As dit 5 of > 5 is,dan word die syfer in die $n-$de plek met 1 vermeerder en die syfers na regs val weg

Die versameling van Natural Getalle, $\mathbb{N}$

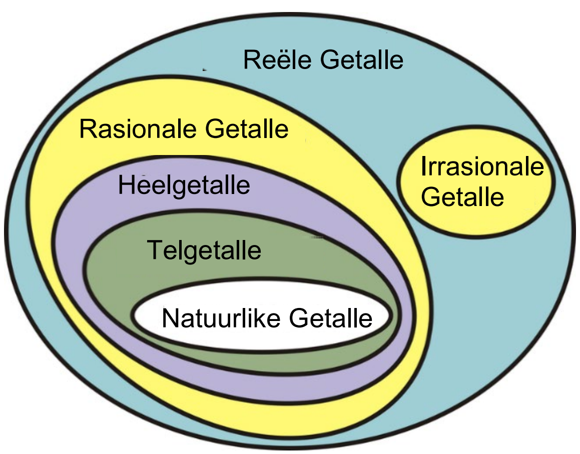
Dit is ‘n oneindige versameling van getalle.

- $\mathbb{N}$ = {1; 2; 3; 4; 5; ….}
- Die versameling is geslote onder $+$ en $\times$.
- Dit kan verdeel word in Priemgetalle en Saamgestelde Getalle.
- Priemgetalle het slegs 2 faktore nl 1 en die getal self, bv. 2, 3, 5, 7, 11 en 13
- Saamgestelde het meer as 2 faktore

Die versameling van Nie- Reële Getalle, $\mathbb{R}'$

Dit is ‘n oneindige versameling van getalle.

- bv. $\sqrt{-2}$; $\sqrt[6]{-20}$, ens.
- Alle ewe wortels van negatiewe getalle



Antwoorde:

2. $\frac{19}{9}$
3. 8 en 9
4. a. 2,44
b. 0,0030
c. 43,701
d. 1,0
e. 24,9
f. 6040600

Voorbeeld 4: Rond die volgende af tot die naaste desimaal soos aangedui:

1. 0,154 tot 2 desimale $\Rightarrow$ 0,15
2. 2,376621 tot 3 desimale $\Rightarrow$ 2,377
3. 5,764703 tot 1 desimaal $\Rightarrow$ 5,8

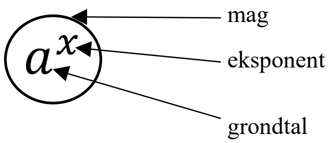
KAN JY?

1. Klassifiseer die volgende getalle:

#	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}'$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{Q}'$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{N}_0$	$\mathbb{N}$	onged
bv.$\sqrt{36}$	✓		✓		✓	✓	✓	
2π								
$\sqrt[3]{-36}$								
21,34 ...								
$\sqrt{\frac{49}{4}}$								
$-\frac{7}{9}$								
$3,1\dot{7}8\dot{2}$								
7,85								
67								
$\sqrt{-16}$								
$\sqrt[3]{-8}$								
$\frac{25}{0}$								

2. Skryf $2,\dot{1}$ as ‘n breuk
3. Tussen watter 2 heelgetalle lê $\sqrt{71}$?
4. Rond af tot die naaste desimaal aangedui:
   (a) 2,43576 tot 2 desimale
   (b) 0,00295019 tot 4 desimale
   (c) 43,700951 tot 3 desimale
   (d) 1,049 tot 1 desimaal
   (e) 24,876 tot die naaste tiendes
   (f) 6040599,87654 tot die naaste telgetal

Les 3 — Eksponente: Hersiening van Gr 9



Definisie: $a^n = a \times a \times a \times a \times a \times a \times$ ... vir n terme

$a^1 = a$

Eksponentwette is slegs van toepassing as ons 'n EENTERM het

Eksponentwette: as $m, n \in \mathbb{Q}$:

Let Wel: slegs **EEN** grondtal in antwoord

1. $\boxed{a^n \times a^m = a^{n+m}}$ As ons 2 magte vermenigvuldig en hulle grondtalle is dieselfde, dan tel ons hulle eksponente bymekaar

Voorbeelde: $2^3 \times 2^4 = 2^{3+4} = 2^7$; $x^5 . x^4 = x^9$; $a^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{2}} = a^1 = a$

Toets: $8 \times 16 = 128 = 2^7$

2. $\boxed{\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}}$ as $n > m$ As ons 2 magte, met dieselfde grondtal, deel, trek ons die noemer se eksponent af van die teller s'n

$= \frac{1}{a^{m-n}}$ as $m > n$

Voorbeelde: $\frac{3^4}{3^1} = 3^{4-1} = 3^3 = 27$; $\frac{a^6 b^7}{a^7 b^5} = \frac{b^{7-5}}{a^{7-6}} = \frac{b^2}{a}$

3. $\boxed{(a^m)^n = a^{mn}}$ bv. $(2^3)^2 = 2^6 = 64$; $(x^3)^4 = x^{12}$; $(a^4)^{\frac{1}{2}} = a^{4 \times \frac{1}{2}} = a^2$

4. $\boxed{(ab)^n = a^n b^n}$ bv. $(3^2 a^3 b^{\frac{1}{2}})^2 = 3^4 a^2 b = 81 a^2 b$; $(2xy)^3 = 2^3 x^3 y^3 = 8x^3 y^3$

5. $\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}}$ bv. $\frac{2^3}{3^3} = \left(\frac{2}{3}\right)^3$; $\left(\frac{a^2}{b}\right)^4 = \frac{a^8}{b^4}$

Ander afleidings:

- $\frac{a^m}{a^m} = a^{m-m} = \boxed{a^0 = 1}$ bv. $2^0 = 1$; $(x+y)^0 = 1$; $4a^0 = 4(1) = 4$
- $\boxed{a^{-n} = \frac{1}{a^n}}$ en $\boxed{\frac{1}{a^{-n}} = a^n}$ bv. $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$; $\frac{1}{x^{-4}} = x^4$

LET WEL:

- $-a^2 = -(a^2)$ en $(-a)^2 = (-a) \times (-a) = a^2 \Rightarrow -a^2 \neq (-a)^2$
- $-3.2^2 = -3 \times 4 = -12$ en nie $(-6)^2 = 36$
- $(2a)^2 = 4a^2 \neq 2a^2$
- $(-2x^2)^3 = -8x^6$ en nie $-6x^5$
- $(7-2)^2 = 5^2 = 25$ en nie $7^2 - 2^2 = 49 - 4 = 45$

KAN JY?

Vereenvoudig die volgende uitdrukkings, sonder 'n sakrekenaar:

1. $5^2 \times 5^3 . 5$
2. $\frac{5^3}{5^{-2}}$
3. $4(5a^0)^2$
4. 3.2^{-2}
5. $(3.2)^{-2}$
6. $\frac{2^a 2^m 2^p}{2}$
7. $\frac{a^{10} b^3}{a^3 b}$
8. $[(-2)^3]^2$
9. $(4x^3 y^2)^3$
10. $6a^{-2} b^3 \times (2ab)^3$
11. $\frac{-4ab^7 c^0}{8a^4 b^2 c^{-2}}$
12. $\frac{(2x^7 y^{\frac{1}{2}})^2}{2xy}$
13. $\frac{(ab^{-1})^4}{(a^{-1} b^{-1})^2}$
14. $\frac{a^{-1} + b^{-1}}{(ab)^{-1}}$

Antwoorde:

1. 5^6
2. 5^5
3. 100
4. $\frac{3}{4}$
5. $\frac{1}{36}$
6. $2^{a+m+p-1}$
7. $a^7 b^2$
8. 64
9. $64x^9 y^6$
10. $48ab^6$
11. $-\frac{b^5 c^2}{2a^3}$
12. $2x^{13}$
13. $\frac{a^6}{b^2}$
14. $a + b$

Les 4	Vereenvoudig Eksponensiële Uitdrukkings

Vereenvoudig die volgende uitdrukkings:

Skryf 81 as die produk van sy **PRIEMFAKTORE.**

Voorbeeld 1: $81^{\frac{3}{4}}$

$= (3^4)^{\frac{3}{4}}$

$= 3^{4\times\frac{3}{4}} = 3^3 = 27$

Skryf elke saamgestelde grondtal as die produk van sy PRIEMFAKTORE. **Let op** die gebruik van hakies om te verseker dat ELKE term nog steeds onder die invloed van die eksponent bly

Voorbeeld 2: $\frac{2^x.3^{x-2}.6^x}{4^{x-1}.9^{x+1}}$

Oplossing: $= \frac{2^x.3^{x-2}.(2.3)^x}{(2^2)^{x-1}.(3^2)^{x+1}}$

Pas eksponentwette 3 en 4 toe sowel as die reëls vir vermenigvuldiging van 'n eenterm met 'n veelterm (onthou nog?)

$= \frac{2^x.3^{x-2}.2^x.3^x}{2^{2x-2}.3^{2x+2}}$

$= 2^{x+x-(2x-2)}.3^{x-2+x-(2x+2)}$

Nou gebruik ons wette 1 en 2 op die magte met dieselfde grondtal. Let op hoe ons hierdie skryf deur SLEGS die 2 grondtalle te gebruik en weereens die gebruik van hakies. Dan vereenvoudig

$= 2^{x+x-2x+2}.3^{x-2+x-2x-2}$

$= 2^2.3^{-4}$

$= \frac{2^2}{3^4} = \frac{4}{81}$

Voorbeeld 2: $\frac{3^{x+1}+3^{x-1}}{3^{x+2}-3^x} = \frac{3^x.3^1+3^x.3^{-1}}{3^x.3^2-3^x}$

Let Wel: ons KAN NIE die eksponentwette gebruik nie omdat die teller en die noemer nie EENTERM is nie– so ons moet **FAKTORISEER**. Pas wet 1 terugwaarts toe en ons het 3^x as GF

$= \frac{\cancel{3^x}(3^1+3^{-1})}{\cancel{3^x}(3^2-1)}$

$= \frac{3^1+3^{-1}}{3^2-1} = \frac{\frac{10}{3}}{8} = \frac{10}{3}\times\frac{1}{8} = \frac{5}{12}$

Voorbeeld 3: $\frac{4^x-1}{2^x-1}$

$\frac{2^{2x}-1}{2^x-1} = \frac{(2^x)^2-1}{2^x-1}$

$2^{2x}-1 = (2^x)^2 - 1$ wat tot die verskil van 2 vierkante lei om te faktoriseer

$= \frac{\cancel{(2^x-1)}(2^x+1)}{\cancel{(2^x-1)}} = 2^x + 1$

KAN JY?

Vereenvoudig die volgende uitdrukkings:

1. $64^{\frac{2}{3}}$
2. $\frac{1}{2}$ van 2^{50}
3. $\frac{(2^3.3^2)^2}{2^2.3^3}$
4. $\frac{(125x^3)^{\frac{1}{3}}}{(5x^{\frac{1}{2}})^2}$
5. $\frac{2^x.4^{x+1}.3^{3x-1}}{6^{3x-1}}$
6. $\frac{18^{x+1}}{2^{x+1}.9^{x+2}}$
7. $\frac{9^{n+1}+3^{2n-1}}{9^n}$
8. $\frac{3^{n+4}-6.3^{n+1}}{7.3^{n+2}}$
9. $\frac{2^{x+2}-2^{x+1}}{2^x+2^{x+2}}$
10. $\frac{5.2^x-4.2^{x-2}}{2^x-2^{x-1}}$
11. $\frac{4^x-25}{2^x+5}$
12. $\frac{4^x-2^x}{2^{x+1}-2}$
13. $* \frac{9^x-3^x-6}{3^x+1}$

Antwoorde:

1. 16
2. 2^{49}
3. $2^4.3 = 48$
4. $\frac{1}{5}$
5. 8
6. $\frac{1}{9}$
7. $\frac{28}{3}$
8. 1
9. $\frac{2}{5}$
10. 8
11. $2^x - 5$
12. $\frac{2^x}{2} = 2^{x-1}$
13. $3^x - 3$

Les 5	Oplos van Eksponensiële vergelykings

Eksponensiële vergelykings waar die onbekende in die eksponent is

Reël: $\boxed{\text{As } a^x = a^k \Rightarrow x = k}$ vir gelyke magte: as die grondtalle dieselfde is, dan moet die eksponente ook dieselfde wees

Los op vir x:

Maak die grondtalle dieselfde; gewoonlik priemgetalle as grondtal

Voorbeeld 1: $3^{x+2} = 27$

Oplossing: $3^{x+2} = 3^3$

Omdat grondtalle dieselfde is; moet eksponente gelyk wees

$\therefore x + 2 = 3$

$\therefore x = 1$

Maak grondtalle dieselfde. Let op die gebruik van hakies.

Voorbeeld 2: $4^{x+1}.8^x = 32.2^{3x-1}$

$\therefore (2^2)^{x+1}.(2^3)^x = 2^5.2^{3x-1}$

Pas Wet 1 toe om een mag beide kante te kry en pas Reël toe

$\therefore 2^{2x+2}.2^{3x} = 2^5.2^{3x-1}$

$\therefore 2^{5x+2} = 2^{3x+4}$

$\therefore 5x + 2 = 3x + 4$

$\therefore 2x = 2$

$\therefore x = 1$

LK is nie EENTERM nie $\Rightarrow$ FAKTORISEER.

Voorbeeld 3: $2^{x+2} - 2^x = \frac{3}{4}$

$\therefore 2^x.2^2 - 2^x = \frac{3}{4}$

$\therefore 2^x(2^2 - 1) = \frac{3}{4}$

$\therefore 2^x(3) = \frac{3}{4}$

$\therefore 2^x = \frac{3}{4} \times \frac{1}{3}$

$\therefore \mathbf{2^x} = \frac{1}{4} = \mathbf{2^{-2}}$

$\therefore x = -2$

Vergelykings waar die onbekende in die grondtal is

Kry die mag alleen aan een kant

Voorbeeld 5: $4x^{\frac{1}{4}} = 16$

$\therefore x^{\frac{1}{4}} = 4$

Maal die eksponente aan beide kante met die resiprook van die eksponent van x om op te los.

$\therefore \left(x^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{4}{1}} = (4)^4$

$\therefore x = 256$

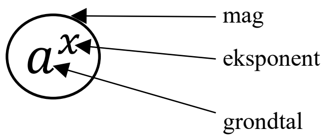
KAN JY?

Los op vir x in die volgende vergelykings:

1. $2^{x-4} = 32$
2. $3^{x-2}.9^x = \frac{1}{27}$
3. $2.3^{x+1} = 162$
4. $3^{x+1} - 3^{x-1} = 24$
5. $3.5^{x-1} + 4.5^x = \frac{23}{25}$
6. $x^{\frac{5}{3}} = 32$
7. $2x^{\frac{3}{4}} + 3 = 57$
8. $3^{x+1} - \left(\frac{1}{3}\right)^{-x-3} = -11 + 3^{x+2}$
9. $(3^x - 9)(3^x - 1) = 0$
10. $4 \times 3^{2x} = 9 \times 2^{2x}$

Antwoorde:

1. 9
2. $-\frac{1}{3}$
3. 3
4. 2
5. -1
6. 8
7. 81
8. -1
9. 2 of 0
10. 1

AKTIWITEITE	*Doen verdere oefeninge uit jou Wiskunde Handboek*
KONSOLIDASIE	 Eksponentwette: 1. $a^n \times a^m = a^{n+m}$ 2. $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ 3. $(a^m)^n = a^{mn}$ 4. $(ab)^n = a^n b^n$ 5. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ 6. $a^0 = 1$ 7. $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ en $\frac{1}{a^{-n}} = a^n$ Eksponensiële vergelykings: As $a^x = a^k \Rightarrow x = k$
WAARDES	*Liewe leerder. WISKUNDE KAN DEURE vir jou OOPMAAK, mits jy hard daaraan werk. Jy sal egter daardie deur op jouself toeslaan deur jou onwilligheid om elke dag te oefen. Hou aan met die goeie werk!*