



VAK en GRAAD	Wiskunde Graad 10	
KWARTAAL 1	Week 2: Algebraïese Uitdrukkings	
ONDERWERP	Faktorisering	
DOEL VAN LES	Om Faktorisering waarmee in Gr 9 begin is, te hersien en aan te gaan met Gr 10 Faktorisering	
HULPBRONNE	Papier gebaseerde bronne	Digitale bronne
	<i>Gaan asseblief na die gedeelte oor Algebraïese Uitdrukkings en Faktorisering in jou Handboek.</i>	https://www.youtube.com/watch?v=5QyeZ7KwFKg https://www.youtube.com/watch?v=kAHRBxLhkW8 https://www.youtube.com/watch?v=FfhtnOKFra
INLEIDING	In hierdie les gaan ons verder met die faktorisering van drieterme vanaf gr 9. Faktorisering is belangrik vir Algebra en verskeie ander afdelings van die kurrikulum, spesifiek by die teken van grafieke. Ons sal twee verskillende metodes van faktorisering van drieterme aanspreek en vervolg met die faktorisering van die som en verskil van 3de magte. Ons sal eindig met 'n kort toets vir jou om jou kennis te konsolideer.	
KONSEPTE/ VAARDIGHEDE	Faktorisering is die “omgekeerde” bewerking van Produkte of Uitbreiding van eenterme, tweeterme en drieterme Faktorisering: Verander die som uitdrukking (polinoom) na 'n produk uitdrukking (eenterm)	
Les 1	Hersiening van Gr 9 Faktorisering: Verskil van Kwadrate en Drieterme van die vorm $x^2 + bx + c$	
Graad 9: Hersiening vanaf Week 1	<p>1. Gemene Faktor Dit kan 'n negatiewe teken, 'n getal, veranderlike of 'n hakie wees. Voorbeelde:</p> <p>a) $(1 - x)$ word $(-x + 1) = -1(x - 1)$ b) $(2x - 4) = 2(x - 2)$ c) $x^3 - x = x(x^2 - 1)$ d) $(x - 3)(x - 2) - (2x + 1)(x - 2)$ $= (x - 2)[x - 3 - (2x + 1)]$ $= (x - 2)(x - 3 - 2x - 1)$ $= (x - 2)(-x - 4)$ $= -(x - 2)(x + 4)$</p> <p>2. Faktoreer Verskil van twee Vierkante (kwadrate) Beide terme moet kwadrate wees; een positiewe en een negatiewe term i.e. $(x^2 - y^2)$ $= (x - y)(x + y)$</p>	<p>KAN JY? Oefening 1: Faktoreer die volgende:</p> <ol style="list-style-type: none"> $5a^2 - 10b$ $4b^3 - 3b^2 - 5ab^2$ $\left(\frac{z^2}{4} - z - \frac{z^3}{2}\right)$ $(-2a + 10ab)$ $3a(2a - 1) - 4(2a - 1)$ $(x - y)^2 + (y - x)(x + y)$ <p>Oefening 2: Faktoreer die volgende:</p> <ol style="list-style-type: none"> $5a^2 - 20$ $-3b^2 + 27$ $x^4 - 16$ $b^2 + 27$ $9b^2 - 25(c + d)^2$ $25w^2 - 16v^2 + (5w - 4v)(2w + v)$
		<div style="border: 1px solid black; padding: 5px;"> <p>Antwoorde:1</p> <ol style="list-style-type: none"> $5(a^2 - 2b)$ $b(4b^2 - 3b - 5ab)$ $\frac{z}{4}(z - 4 - 2z^2)$ $2a(5b - 1)$ of $-2a(1 - 5b)$ $(2a - 1)(3a - 4)$ $-2y(x - y)$ </div> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-top: 10px;"> <p>Antwoorde: 2</p> <ol style="list-style-type: none"> $5(a^2 - 4) = 5(a - 2)(a + 2)$ $-3b^2 + 27 = -3(b^2 - 9)$ $= -3(b + 3)(b - 3)$ $x^4 - 16 = (x^2 + 4)(x^2 - 4)$ $= (x^2 + 4)(x - 2)(x + 2)$ $b^2 + 27 = b^2 + 27$ (som van kwadrate!) $[3b - 5(c + d)][3b - 5(c + d)]$ $(5w - 4v)(7w + 5v)$ </div>

Les 2:

Faktoriserings: Die kwadratiese drieterm: $x^2 + bx + c$

3. Faktoriseer Drieterme van die vorm: $x^2 + bx + c$

In elk van die volg

Voorbeeld 1: $a^2 + 5a + 4$

Metode 1: gebruik Groepering

$$\begin{aligned} & a^2 + 5a + 4 \\ &= a^2 + 4a + a + 4 \\ &= (a^2 + 4a) + (a + 4) \\ &= a(a + 4) + (a + 4) \\ &= (a + 4)(a + 1) \end{aligned}$$

Kies die **faktore** van + 4 sodat as ons hulle optel, ons +5 kry, dus (+4) en (+1): (+4)(+1) = +4 en (+4) + (+1) = +5
So: +5a word +4a + a om 4 terme te verkry wat **Gegroepeer kan word**

Voorbeeld 2: $b^2 - 7b + 6$

$$\begin{aligned} &= b^2 - 6b - b + 6 \\ &= (b^2 - 6b) + (-b + 6) \\ &= (b^2 - 6b) - (b - 6) \\ &= b(b - 6) - (b - 6) \\ &= (b - 6)(b - 1) \end{aligned}$$

Kies die **faktore** van + 6 sodat as ons hulle optel, kry ons -7, dus (-6) en (-1): (-6)(-1) = +6 en (-6) + (-1) = -7
So: -7b word -6b - b om 4 terme te verkry wat **Gegroepeer kan word**

Voorbeeld 3: $x^2 + 2x - 15$

$$\begin{aligned} &= x^2 + 5x - 3x - 15 \\ &= (x^2 + 5x) - (3x + 15) \\ &= x(x + 5) - 3(x + 5) \\ &= (x + 5)(x - 3) \end{aligned}$$

Kies die **faktore** van - 15 sodat as ons hulle optel, kry ons +2, dus (+5) en (-3): (+5)(-3) = -15 en (+5) + (-3) = +2
So: +2x word +5x - 3x om 4 terme te verkry wat **Gegroepeer kan word**

Voorbeeld 4: $m^2 - m - 12$

$$\begin{aligned} &= m^2 - 4m + 3m - 12 \\ &= (m^2 - 4m) + (3m - 12) \\ &= m(m - 4) + 3(m - 4) \\ &= (m - 4)(m + 3) \end{aligned}$$

Kies die **faktore** van - 12 sodat as ons hulle optel, kry ons -1, dus (-4) en (+3): (-4)(+3) = -12 en (-4) + (+3) = -1
So: -m word -4m + 3m om 4 terme te verkry wat **Gegroepeer kan word**

Metode 2:

As ons kyk na die produk: $(x + a)(x + b)$

kry ons: $x^2 + bx + ax + ab$

Faktoriseer

drieterm

$$= x^2 + (a + b)x + ab$$

Omdat Faktoriserings die omgekeerde bewerking van produkte is, moet ons let op die volgende as ons $x^2 + (a + b)x + ab$ wil Faktoriseer:

- ons sal 2 hakies kry
- die 1ste terme in die hakies (x en x) is faktore van die 1ste term (x^2) van die kwadratiese drieterm
- die 2de terme in die hakies
 - is **faktore van die laaste term** (ab) van die kwadratiese drieterm sodat: as ons hulle **optel**, kry ons die **middelterm** van die kwadratiese drieterm

Daarom: om $a^2 + 5a + 4$ te faktoriseer

Faktore van a^2 is: **a** en **a**, so ons hakies is $(a + \square)(a + \Delta)$

Om \square en Δ te vind, moet ons kyk na Faktore van + 4, wat is:

- $(\pm 2) \times (\pm 2)$ en as ons optel dan kry ons +4 of - 4
 - $(\pm 4) \times (\pm 1)$ en as ons optel dan kry ons +5 of - 5
 - **Ons soek vir faktore wat optel tot +5, daarom $\square = +4$ en $\Delta = +1$**
- $\therefore a^2 + 5a + 4 = (a + 4)(a + 4)$

Voorbeeld 2: $b^2 - 7b + 6$

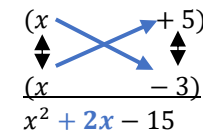
Faktore van b^2 is: **b** en **b**, so ons hakies is $(b + \square)(b + \Delta)$

Om \square en Δ te vind, moet ons kyk na Faktore van + 6, wat is:

- $(\pm 2) \times (\pm 3)$ en as ons optel dan kry ons +5 of - 5
 - $(\pm 6) \times (\pm 1)$ en as ons optel dan kry ons +7 of - 7
 - **Ons soek vir faktore wat optel tot -7, daarom $\square = -6$ en $\Delta = -1$**
- $\therefore b^2 - 7b + 6 = (b - 6)(b - 1)$

Voorbeeld 3: $x^2 + 2x - 15$

$$= (x + 5)(x - 3)$$



Voorbeeld 4: $m^2 - m - 12 = (m - 4)(m + 3)$

omdat $(-4)(+3) = -12$ en $(-4) + (+3) = -1$

NOTAS: Om $x^2 + bx + c$ te faktoriseer

- 2 hakies
- 1ste terme in hakies is x en x
- 2de terme is faktore van laaste term, c , sodat, as ons dit optel, gee dit die verlangde middelterm.
- As die teken van c (+) is, moet ons die faktore **optel** om die middelterm te verkry; beide sal (+) wees as middelterm positief is, of (-) as middelterm negatief is.
- As die teken van c (-) is, moet ons die faktore “**aftrek**” om die middelterm te verkry; een faktor sal (+) wees en die ander (-)
 - as die middelterm positief is, sal die groter faktor (+) wees
 - as die middelterm negatief is, sal die groter faktor (-) wees

Voorbeeld 5: $x^2 - 8x + 12$
 $= (x - 6)(x - 2)$

$$\begin{array}{l} x \quad -6 \\ x \quad -2 \\ \hline -6x - 2x = -8x \end{array}$$

Voorbeeld 6: $3x^2 - 39x - 90$
 $= 3(x^2 - 13x - 30)$
 $= 3(x - 15)(x + 2)$

$$\begin{array}{l} x \quad -15 \\ x \quad +2 \\ \hline -15x + 2x = -13x \end{array}$$

LET WEL: Hoewel $(-10) \times (+3) = -30$, as ons optel, ons kry -7

4. Faktorisering: Drieterme - die Volkome kwadraat

Soos jy kon oplet in die vorige oefening, nr 6:

$x^2 - 8x + 16 = (x - 4)(x - 4) = (x - 4)^2$ - die volkome kwadraat vorm van die drieterm - 1ste term en laaste term is kwadrate en die

middelterm $= \pm 2 \times \sqrt{(1\text{ste term}) \times (2\text{de term})}$

Voorbeeld 1: $x^2 + 2x + 1$
 $= (x + 1)^2 \Rightarrow$ Volkome kwadraat

$$2x = 2 \times \sqrt{x^2 \times 1}$$

Voorbeeld 2: $3x^2 - 30x + 75$
 $= 3(x^2 - 10x + 25) = 3(x - 5)^2$

Oefening 1

Faktoriseer die volgende

(Gebruik enige metode)

1. $x^2 + 10x + 9$
2. $x^2 - 10x + 16$
3. $a^2 - 4a - 12$
4. $m^2 + m - 30$
5. $6a^2 - 36a + 48$
6. $x^2 - 8x + 16$
7. $x^2 + 5xy - 36y^2$
8. $x - 6x^{\frac{1}{2}}y + 8y^2$
9. $5x^2 + 28x + 15$

Antwoorde: Oefening 1

1. $(x + 9)(x + 1)$
2. $(x - 8)(x - 2)$
3. $(a - 6)(a + 2)$
4. $(m + 6)(m - 5)$
5. $6(a - 4)(a - 2)$
6. $(x - 4)^2$
7. $(x + 9y)(x - 4y)$
8. $(x^{\frac{1}{2}} - 2y)(x^{\frac{1}{2}} - 4y)$
9. $(5x + 3)(x + 5)$

Oefening 2

Faktoriseer die volgende

completely

(Gebruik enige metode)

1. $x^2 + 10x + 25$
2. $x^2 - 6x + 9$
3. $a^2 - 4a + 4$
4. $3m^2 + 36m + 108$
5. $(a^2 - 2ab + b^2) - w^2$
6. $4x^2 - 12xr + 9r^2 - 1$

Antwoorde: Oefening 2

1. $(x + 5)^2$
2. $(x - 3)^2$
3. $(a - 2)^2$
4. $3(m + 6)^2$
5. $(a - b - w)(a - b + w)$
6. $(2x - 3r + 1)(2x - 3r - 1)$

Les 3 + 4:

Faktoriserings: Die kwadratiese drieterm van die vorm $ax^2 + bx + c$

Voorbeeld 1: Faktoriseer: $4x^2 + 11x + 6$

Metode 1: Maal 4 met 6 = +24

$$\begin{aligned} 4x^2 + 11x + 6 &= 4x^2 + 8x + 3x + 6 \\ &= (4x^2 + 8x) + (3x + 6) \\ &= 4x(x + 2) + 3(x + 2) \\ &= (x + 2)(4x + 3) \end{aligned}$$

Kies die **faktore** van +24 sodat as ons hulle optel, kry ons +11, dus (+8) en (+3): (+8)(+3) = +24 en (+8) + (+3) = +11
So: +11x word +8x + 3x om 4 terme te verkry wat **Gegropeer kan word**

Metode 2:

Omdat Faktoriserings die omgekeerde bewerking van produkte is, moet ons op die volgende let as ons 'n kwadratiese drieterm wil Faktoriseer:

- ons sal 2 hakies kry
- *die 1ste terme in die hakies is faktore van die 1ste term van die kwadratiese drieterm
- die 2de terme in die hakies
 - is **faktore van die laaste term** van die kwadratiese drieterm sodat:
 - as ons **kruisvermenigvuldig** met * respektiewelik, en dan **optel**, moet ons die **middelterm** van die kwadratiese drieterm kry

Daarom: om $4x^2 + 11x + 6$ te faktoriseer

Faktore van $4x^2$ is: 2x en 2x of 4x en x

Faktore van +6 is: ±6 en ±1 of ±2 en ±3 [ons moet net na die (+) waardes te kyk omdat laaste term (+) is en die middelterm is (+)]

Faktore van 1ste term		Faktore van Laaste term			
2x	4x	+6	+1	+3	+2
2x	x	+1	+6	+2	+3

As ons kyk na die 1ste stel van faktore: kruisvermenigvuldig en optel

$$\begin{array}{r} 2x \quad +6 \Rightarrow +12x \\ 2x \quad +1 \Rightarrow +2x \\ \hline +14x \text{ nie die middelterm} \end{array}$$

Kyk nou na

$$\begin{array}{r} 4x \quad +3 \Rightarrow +3x \\ x \quad +2 \Rightarrow +8x \\ \hline +11x \text{ wat die middelterm is} \end{array}$$

Jy moet hierdie nie te toon nie, maar dis belangrik

$$\therefore 4x^2 + 11x + 6$$

$$= (4x + 3)(x + 2)$$

Voorbeeld 2: Faktoriseer: $20x^2 + 24xy - 9y^2$

Metode 1: $20x^2 + 24xy - 9y^2$

Tekens moet verskil

$$\begin{aligned} 20 \times -9 &= -180 \\ \Rightarrow \text{faktore van } -180 \text{ wat optel tot } +24: &+30 \text{ en } -6 \\ \therefore 20x^2 + 24xy - 9y^2 &= 20x^2 + 30xy - 6xy - 9y^2 \\ &= (20x^2 + 30xy) + (-6xy - 9y^2) \\ &= 10x(2x + 3y) - 3y(2x + 3y) \\ &= (2x + 3y)(10x - 3y) \end{aligned}$$

Metode 2: $20x^2 + 24xy - 9y^2$

Faktore van $20x^2$: 20x en x; 10x en 2x; 4x en 5x

Faktore van $-9y^2$: +9y en -y; -9y en +y; +3y en -3y

Kyk vir die rangskikking wat die verlangde middelterm sal gee – **tref- en- trap metode**

Neem: $10x \quad -9y \Rightarrow -18xy$ (10x en 2x is faktore van $20x^2$; -9 en +1 is faktore van -9)

$$\begin{array}{r} 2x \quad +1y \Rightarrow +10xy \\ \hline -8xy \end{array}$$

OF

$$\begin{array}{r} 10x \quad +9y \Rightarrow +18xy \\ 2x \quad -1y \Rightarrow -10xy \\ \hline 8xy \end{array}$$

Nie die verlangde middelterm: +24xy; probeer ander

Probeer:

$$\begin{array}{r} 10x \quad -3y \Rightarrow -6xy \\ 2x \quad +3y \Rightarrow +30xy \\ \hline +24xy \text{ JIP!} \end{array}$$

$$\begin{aligned} &= 20x^2 + 24xy - 9y^2 \\ &= (10x - 3y)(2x + 3y) \end{aligned}$$

Die horisontale rangskikking is die terme in die hakies!

Deur oefening, sal dit makliker raak om faktore te vind

KAN JY?

Oefening:

Faktoriseer volledig: Verdeel oefening tussen 2 dae

1. $3a^2 + 10a + 3$
2. $5x^2 + 11x + 2$
3. $5a^2 - 23a + 12$
4. $8a^2 - 18a + 7$
5. $6x^2 + x - 1$
6. $10y^2 + 11y - 6$
7. $10p^2 + p - 9$
8. $21x^2 - 2x - 8$
9. $4x^2 - 28x - 15$
10. $9x^2 + 6xy + y^2$
11. $6s^2 - 11st + 3t^2$
12. $-2x^2 - 3xy - y^2$
13. $2x^2 - 20xy + 50y^2$
14. $10p^3 + 2p^2y - 8py^2$
15. $20a^2 + ab - 12b^2$
16. $12a^2 - 15ab - 18b^2$
17. $2x^2 - 1 - \frac{1}{x^2}$
18. $8f^2 + 3gf + \frac{1}{4}g^2$
19. $3x^2(x + 2) - 16x(x + 2) + 5(x + 2)$
20. $15(a - b)^2 - 7(a - b) - 4$

Antwoorde:

1. $(3a + 1)(a + 3)$
2. $(5x + 1)(x + 2)$
3. $(5a - 3)(a - 4)$
4. $(2a - 1)(4a - 7)$
5. $(3x - 1)(2x + 1)$
6. $(2y + 3)(5y - 2)$
7. $(10p - 9)(p + 1)$
8. $(7x + 4)(3x - 2)$
9. $(2x + 1)(2x - 15)$
10. $(3x + y)^2$
11. $(2s - 3t)(3s - t)$
12. $-(2x + y)(x + y)$
13. $2(x - 5y)^2$
14. $2p(5p - 4y)(p + y)$
15. $(4a - 3b)(5a + 4b)$
16. $3(4a + 3b)(a - 2b)$
17. $\left(2x + \frac{1}{x}\right)\left(x - \frac{1}{x}\right)$
18. $\left(2f + \frac{1}{2}g\right)\left(4f + \frac{1}{2}g\right)$
19. $(x + 2)(3x - 1)(x - 5)$
20. $(5a - 5b - 4)(3a - 3b + 1)$

Les 5:**Faktorisering: Som en Verskil van 2 kubieke/ 3de magte**

Onthou Faktorisering is die omgekeerde van produkte – verander 'n somuitdrukking (veelterm) na 'n produkuitdrukking (eenterm)

Faktoriseer die som en verskil van twee kubieke/ 3de magte:

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2) : \text{som van twee 3de magte}$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2) : \text{verskil van twee 3de magte}$$

Voorbeeld 1: $a^3 + 27$
 $= (a + 3)(a^2 - 3a + 9)$

Voorbeeld 2: $8x^3 - 216$
 $= (2x - 6)(4x^2 + 12x + 36)$

Voorbeeld 3: $(z - y)^3 + m^3$
 $= [(z - y) + m][(z - y)^2 - m(z - y) + m^2]$

Voorbeeld 4: $x^6 + y^6 = (x^3 + y^3)(x^3 - y^3)$
 $= (x + y)(x^2 - xy + y^2)(x - y)(x^2 + xy + y^2)$

- Kontroleer of jou faktore korrek is deur die produk as rofwerk te doen.

Kubiek: getal verhef tot die 3de mag, bv. x^3 (x kubiek of x tot die 3de mag) OF Eksponente wat deelbaar is deur 3

Metode:

- 2 hakies
- 1ste hakie: Neem die $\sqrt[3]{}$ van elke term in som/ verskil van 3de magte uitdrukking
- Teken hang af van som (+) of verskil (-)
- 2de hakie:
 - kwadreer 1ste term (van 1ste hakie)
 - 1ste term \times 2de term (**verander teken**)
 - kwadreer 2de term.

KAN JY?

Faktoriseer volledig:

Oefening:

1. $125x^3 + y^3$
2. $216m^3 - b^3$
3. $x^3 - 125y^3$
4. $-216x^3 - y^3$
5. $x^3 + \frac{8}{x^3}$
6. $2x^4 - 128x$

Antwoorde:

1. $(5x + y)(25x^2 - 5xy + y^2)$
2. $(6m - b)(36m^2 + 6mb + b^2)$
3. $(x - 5y)(x^2 + 5xy + 25y^2)$
4. $-(6 + y)(36 - 6y + y^2)$
5. $\left(x + \frac{2}{x}\right)\left(x^2 - 2 + \frac{4}{x^2}\right)$
6. $2x(x - 4)(x^2 + 4x + 16)$

Gemengde Oefening (Toets jou kennis)**Faktoriseer volledig:**

1. $12a^2b - 8ab + 4ab^2$
2. $4(a^2 - b^2) - b(b^2 - a^2)$
3. $4x^3 - 14x^2 + 12x$
4. $16w^2 - 14w + 3$
5. $4p^2 + 12pq + 9q^2$
6. $9x^2 - 18xw^2 + 8w^4$
7. $(25g^2 - 10g + 1) - 4h^2$
8. $8x^3 - 215y^3$
9. $3p^2 - 8pq - 35q^2$
10. $-3t^2 + 8ts + 16s^2$

Antwoorde:

1. $4ab(3a - 2 + b)$
2. $(a + b)(a - b)(4 + b)$
3. $2x(x - 2)(2x - 3)$
4. $(8w - 3)(2w - 1)$
5. $(2p + 3q)^2$
6. $(3x - 2w^2)(3x - 4w^2)$
7. $(5g - 1 - 2h)(5g - 1 + 2h)$
8. $(2x - 5y)(4x^2 + 10xy + 25y^2)$
9. $(3p + 7q)(p - 5q)$
10. $-(3t + 4s)(t - 4s)$

AKTIWITEITE

Doen ander oefening vanaf jou Wiskunde Handboek

KONSOLIDASIE

FAKTORISERING

Kyk gerus na die Youtube opnames vir konsolidasie en ander metodes van faktoriserings van kwadratiese drieterme

a) Gemene Faktor (GF):

$$ab + ac = a(b + c) \text{ OF } a(b + c) + d(b + c) = (b + c)(a + d)$$

b) Faktoriseer Twee Terme

- Verskil van 2 vierkante/kwadratiese (VVTV):

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

- Som van twee 3de magte:

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

- Verskil van twee 3de magte:

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

c) Terme wat dieselfde bly (kan nie verder gefaktoriseer word nie) $(x^2 + y^2)$ beide terme positief – geen VVTV $(x + y)$ eenvoudigste vorm van uitdrukking

	<p>d) <u>Faktoriseer Drieterme</u></p> <ul style="list-style-type: none"> • Volkome Vierkant/ Kwadraat • Gewone kwadratiese Drieterme <p>e) <u>Faktoriseer Vierterme deur Groepering:</u> Groepeer terme in pare, sodat elke paar 'n gemene faktor het met verkieslik 'n + teken tussen die pare</p> <ul style="list-style-type: none"> ○ Haal die GF uit in elke paar (neem tekenverandering inag) en gaan voort soos GF as 'n uitdrukking ○ Spesiale gevalle: <ul style="list-style-type: none"> i) Volkome Vierkant gevolg deur Verskil van Twee vierkante ii) Som/ Verskil van 3de magte, gevolg deur Verskil van twee kwadrate
WAARDES	<i>Liewe leerder. Wiskunde is 'n OEFENVAK. Dit is hoekom jy ELKE DAG Tuiswerk kry. OEFEN jou Wiskunde elke dag. OEFENING maak PERFEEK.</i>